# 第9章　意思決定システム

本章では，同じ条件でシミュレーションを行っても，各自の結果が異なる問題を取り上げる．他人のレポートを参照できない問題である．

## 9.1　課題説明

くじの購入者は，コインを表が出るまで投げ続け，$n$ 回目のトスで初めて表が出たとすると，$2n$ 万円の賞金を受け取れるくじを考える．すなわち，表 9.1 のような賞金を受け取れるくじである．

表 9.1: くじの賞金

| 表が出るまでのトスの回数 | 賞金 (万円) |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | $2^2$ |
| 3 | $2^3$ |
| : | : |
| $n$ | $2^n$ |

ただし，コインの表と裏の出る確率は等しく 1/2 であるとする．このとき，初めて表の出る確率は次表のようになる．

表 9.2: 表の出る確率

| | |
|---|---|
| 1 回目で表の出る確率 | $1/2$ |
| 2 回目で表の出る確率 | $(1/2)^2$ |
| 3 回目で表の出る確率 | $(1/2)^3$ |
| : | : |
| $n$ 回目で表の出る確率 | $(1/2)^n$ |

これから，このくじを買って賞金 $X$ 万円を得る期待値は，

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times (1/2) + 2^2 \times (1/2)^2 + 2^3 \times (1/2)^3 + \cdots + 2^n \times (1/2)^n + \cdots \\ &= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \\ &= \infty \end{aligned} \tag{9.1}$$

と計算できる．期待値が無限大であるから，このくじの値段がどんなに高くても有限であればくじを買った方が得をすることになるはずである．例えば，くじの値段を 5 万円とすると，$2^3 = 8$ だから，3 回目で表が出れば 3 万円の得になる．2 回続けて裏がで出ることを期待するのはごく自然なことである．くじの値段をもっと高くしないとくじの運営会社は潰れてしまう．そこでくじの値段を 1000

万円とすると，今度は $2^{10} = 1024$ だから，少なくとも 9 回続けて裏が出なければ元手は取れないことになる．普通の人ならコインをトスして 9 回も続けて裏が出ることは期待しないだろう．すなわち，買い手はくじを買わないという意思決定がなされる．このように賞金の期待値が無限大にもかかわらずくじを買わないパラドックスを St. Petersburg's Paradox という．

そこで，このくじの性質をシミュレーションによって調べ，くじの値段をいくらぐらいに設定すればよいかを考察せよ．シミュレーションでは，くじを少なくとも 1000 回 (各自の PC の限界まで) 引いて，初めて表の出るまでのトス回数，およびその度数とくじ 1 本当たりの平均獲得賞金額を調べよ．

実際のシミュレーションでは，図 9.1 のようにスプレッドシートを作成し，0 以上の 1 未満の乱数を発生させ，0.5 以下ならば裏 (1)，0.5 より大きな数値の場合は表 (0) として，表を作成する．スプレッドシート上では，まず 1 回目のトスを表す 1 列目に `rand()` で発生させた乱数を if 関数で判定し，1 または 0 を設定する．次の列からは左隣のセルの値が 0 だったら 0 を，そうでない場合には `rand()` と if 関数で 1 または 0 を設定する．あとは表が出るまでのトス回数を合計すればよい．

| 試行回数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | トス回数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 14 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| · | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| · | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| · | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| · | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| · | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| · | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| · | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| · | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| · | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| · | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| · | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 998 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 999 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

図 9.1: シミュレーション用スプレッドシートの例

この初めて表の出るまでのトス回数をもとに，その度数を度数分布表とヒストグラムとして作成し，同時に 1 本当たりの平均獲得賞金額を調べ，くじの値段をいくらぐらいに設定すればよいかを考察せよ．

## 9.2　参考資料

賞金期待値が無限大にもかかわらず購買意欲に結びつかない理由を，くじから得られる金額の効用を考察することによって理解する解釈がある．10 万円持っている人の 1 万円と 1000 万円持っている人の 1 万円では，同じ金額でもその主観的，実質的価値が異なるということを示す．限界効用逓減の法則を用いて，くじのもたらす効用（リスクを伴う資産）はリスクのない安全な資産に換算すると

4 万円になる．この差がパラドックスを考察する鍵になると考えられる．

### 9.2.1 限界効用逓減の法則

賞金期待値が無限大にも関わらず購買意欲に結びつかない理由を，くじから得られる金額の効用を考察することによって理解されるとする解釈がある．

今，ある個人の収入が $x$ から $x+h$ へ増加したとき，この収入の効用 $u$ の増加分は収入の増加分 $h$ に比例するが，初期収入 $x$ に反比例すると考えるのが自然である．これは

$$u(x+h)-u(x)=k(h/x) \tag{9.2}$$

とあらわされる．ここで $k$ は比例定数である．両辺を $h$ で割って $h \to 0$ の極限をとれば

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=\frac{du(x)}{dx}=\frac{k}{x} \tag{9.3}$$

となるから，この微分方程式を解いて

$$u(x)=k\ln x+C \tag{9.4}$$

とあらわせることになる．これは $x$ の効用が $\ln x$ であることを示している．このように金額に対してその金額の効用を定義することができる．この効用関数の変化率は独立変数の減少関数となっていて，独立関数の増加に伴って増加する効用の大きさ (限界効用) が逓減するので，限界効用逓減の法則という．10 万円持っている人の 1 万円と 1000 万円持っている人の 1 万円では，同じ金額でもその主観的，実質的価値が異なることを表している．

くじによって得るのは金銭そのものではなく，金銭の効用であると考えると，くじから得られる金額の効用関数が上のような対数関数で表されるとすると ($C=0$ とする)，次のようにくじから得られる金額の効用の期待値は

$$\begin{aligned} E &= u(2)\times(1/2)+u(2^2)\times(1/2)^2+u(2^3)\times(1/2)^3+\cdots+u(2^n)\times(1/2)^n+\cdots \\ &= k\ln 2\times(1\cdot(1/2)+2\cdot(1/2)^2+3\cdot(1/2)^3+\cdots+n\cdot(1/2)^n+\cdots) \\ &= 2k\ln 2=k\ln 4 \end{aligned} \tag{9.5}$$

と計算される．これは，くじのもたらす効用 (リスクを伴う資産) はリスクのない安全な資産に換算すると 4 万円であることを示している．賞金期待値は無限大だが，効用では買ったくじの期待値は 4 万円にすぎず，この差の認識が買い手がくじを買わないと意思決定されるパラドックスをとく鍵になると考えられる．

### 9.2.2 表が出るまでのトス回数の期待値

コインをトスして，表の出る確率を $p$，裏の出る確率を $1-p$ として，$n$ 回目に初めて表の出る確率を $f(n)$ であらわすと，

$$f(n)=(1-p)^{n-1}p \tag{9.6}$$

である．これから最初に表が出るまでのトスの期待値は

$$E(n)=\sum nf(n)=p+2(1-p)p+3(1-p)^2p+4(1-p)^3p+\cdots \tag{9.7}$$

ここで,

$$(1-p)E(n) = (1-p)p + 2(1-p)^2p + 3(1-p)^3p + 4(1-p)^4p + \cdots \tag{9.8}$$

を使えば,

$$\begin{aligned} E(n) - (1-p)E(n) &= p + (1-p)p + (1-p)^2p + (1-p)^3p + \cdots \\ &= p/(1-(1-p)) = 1 \end{aligned} \tag{9.9}$$

となる．したがって，·

$$E(n) = 1/p \tag{9.10}$$

である．このくじでは $p = 1/2$ であるから $E(n) = 2$ である．すなわち，表が出るまでのトスの回数の期待値は2であり，1本のくじに対して，続けて裏が2回出ることさえ期待できないことになる．

### 9.2.3 シミュレーション結果をどのように考察するか

- くじの本数とともに平均獲得金額はどのように推移するか．限界効用逓減の法則では期待値に上限があるとされる．
- 表が出る回数はどのように推移するか．数学的期待値で解釈できるか．
- 度数密度分布ははじめて表が出るまでの回数を $n$ として $(1/2)n$ で表されるか．また，表が出るまでの平均のトス回数はいくつになるか．
- 算術乱数の周期性の問題は，このシミュレーションに影響を与えているか．もし影響があるとしたならば，いかなる対策を施せばよいか．